

**Colle du 18/09 - Sujet 1**  
**Logique et fonctions réelles**

**Question de cours.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ . Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 3^n + (-1)^n$ .

**Exercice 1.** Etudier  $f : x \mapsto \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ .

**Exercice 2.** Déterminer toutes les applications  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad f(n + m) = f(n)f(m).$$

**Colle du 18/09 - Sujet 2**  
**Logique et fonctions réelles**

**Question de cours.** Montrer que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

**Exercice 1.** Soit  $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Déterminer la parité de  $f$ .
3. Poursuivre l'étude de  $f$ .

**Exercice 2.** Déterminer l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

**Colle du 18/09 - Sujet 3**  
**Logique et fonctions réelles**

**Question de cours.** Montrer que  $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists! (g, h) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g$  paire,  $h$  impaire, tel que  $f = g + h$ .

**Exercice 1.** Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^2 + 1$  n'est pas un multiple de 4.

**Exercice 2.** Soit  $f : x \mapsto \frac{\cos(\sqrt{x^2+1})}{\sin(\sqrt{x^2+1})}$ . Etudier  $f$ .